Nota matemática sobre el problema de transformación con tres departamentos á la Bortkiewicz

Debate Rallo-Astarita

Álvaro Romaniega

April 22, 2023

1 Introducción al problema

Como es bien sabido, desde Bortkiewicz[1] se puede mostrar que al combinar el esquema de reproducción simple del capital de Marx con la transformación de valores en precios de producción, se llegaba a una contradicción en los resultados. Para ello se propuso un modelo simplificado de la economía con tres departamentos; el departamento I produce el capital constante de los departamentos I, II y III, el departamento II produce los medios de subsistencia de los trabajadores de los departamentos I, II y III, y el departamento III produce los bienes de lujo que compran los capitalistas de los departamentos I, II y III. Se puede mostrar entonces que, al tratar de transformar los valores en precios de producción, se llega a una contradicción.

Matemáticamente, dado el sistema de tres departamentos de Bortkiewicz, empecemos con algunas definiciones. Primero, x, y, z representan la relación entre precios de producción y valores en el departamento I, II, III, respectivamente, y i_a representa los valores del departamento i-ésimo, $i \in \{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}\}$, asociados a $a \in \{c, v, s\}$ (capital constante, variable y plusvalía, respectivamente). Por ejemplo, I_c representa el valor del capital constante del departamento I, II_v representa el valor del capital variable del departamento II, y así sucesivamente. También podemos *definir*

$$\begin{aligned}
\Sigma_c &:= \mathrm{I}_c + \mathrm{II}_c + \mathrm{III}_c\,, \\
\Sigma_s &:= \mathrm{I}_s + \mathrm{II}_s + \mathrm{III}_s\,, \\
\Sigma_v &:= \mathrm{I}_v + \mathrm{II}_v + \mathrm{III}_v\,.
\end{aligned}$$

Estas representan la suma de los valores de cada uno de los tres departamentos en términos de su composición en capital constante, variable y plusvalía, respectivamente. Es decir, Σ_c representa la suma de los valores de capital constante en los tres departamentos, Σ_s representa la suma de los valores de plusvalía en los tres departamentos, y Σ_v representa la suma de los valores de capital variable en los tres departamentos.

En el sistema planteado por Bortkiewicz, para igualar el precio de producción del capital mercantil de cada departamento (LHS) con la suma de las compras de ese capital mercantil por el resto de los departamentos (RHS) tenemos que tener,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{I}_c x + \mathrm{I}_v y)\,(p+1) &= \Sigma_c x\,, \\
(\mathrm{II}_c x + \mathrm{II}_v y)\,(p+1) &= \Sigma_v y\,, \\
(\mathrm{III}_c x + \mathrm{III}_v y)\,(p+1) &= \Sigma_s z\,.
\end{aligned}$$

En cada ecuación, la parte izquierda representa el precio de producción del capital mercantil de un departamento particular. Por ejemplo, en la primera ecuación,

$$(\mathrm{I}_c x + \mathrm{I}_v y)\,(p+1)$$

representa el precio de producción del capital mercantil en el departamento I. La parte derecha de cada ecuación representa la suma de las compras de ese capital mercantil por el resto de los

[1] Seguimos también la formulación de Winternitz.

departamentos. Por ejemplo, en la primera ecuación, $\Sigma_c x$ representa la suma de las compras del capital mercantil del departamento I por los departamentos I, II y III. Para que los precios de producción del capital mercantil en cada departamento sean iguales a la suma de las compras de ese capital mercantil por el resto de los departamentos, se igualan las partes izquierda y derecha de cada ecuación. Esto resulta en el sistema de tres ecuaciones mostrado arriba. En conjunto, estas ecuaciones permiten analizar cómo se determinan los precios de producción del capital mercantil en el sistema de tres departamentos de Bortkiewicz, y cómo se relacionan estos precios con las compras de capital mercantil realizadas por los diferentes departamentos.

Por otro lado, queremos que la tasa de beneficio, p, venga determinada por la plusvalía y que el agregado de valores coincida con el agregado de precios de producción. En efecto, Marx dice:

> *Hence, the rate of profit is the same in all spheres of production, for it is equalized on the basis of those average spheres of production which has the average composition of capital. Consequently, the sum of the profits in all spheres of production must equal the sum of the surplus-values, and the sum of the prices of production of the total social product equal the sum of its value.*

— Capital, Volume III, Chapter 10. También:

> *And in the same way the sum of the prices of production of all commodities produced in society – the totality of all branches of production – is equal to the sum of their values.*

— Capital, Volume III, Chapter 9.

Y en ese mismo capítulo, Marx es claro que, obviamente, el valor agregado incluye el de C, no solo V y S (ver el ejemplo numérico que ahí plantea):

> *The sum total of the capitals invested in these five spheres of production = 500; the sum total of the surplus-value produced by them = 110; the aggregate value of the commodities produced by them = 610.*

— Capital, Volume III, Chapter 9.

Más en detalle, primero, la expresión de la tasa de beneficio:

$$p = \frac{\Sigma_s}{x\Sigma_c + y\Sigma_v},$$

y luego, la ecuación que expresa la condición de que el agregado de valores coincide con el agregado de precios de producción:

$$\Sigma_v + \Sigma_c + \Sigma_s = x\Sigma_c + y\Sigma_v + z\Sigma_s$$

Combinando todas esas restricciones y después de un poco de álgebra elemental, se tiene que resolver el siguiente sistema de ecuaciones e inecuaciones en dos variables, (x, y), que es no lineal y está sobredeterminado:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{I}_c x + \mathrm{I}_v y)\left(\frac{\Sigma_s}{\Sigma_c x + \Sigma_v y} + 1\right) &= \Sigma_c x\,,\\
(\mathrm{II}_c x + \mathrm{II}_v y)\left(\frac{\Sigma_s}{\Sigma_c x + \Sigma_v y} + 1\right) &= \Sigma_v y\,,\\
(\mathrm{III}_c x + \mathrm{III}_v y)\left(\frac{\Sigma_s}{\Sigma_c x + \Sigma_v y} + 1\right) + \Sigma_c x + \Sigma_v y &= \Sigma_c + \Sigma_s + \Sigma_v\,,\\
x &\geq 0\,,\\
y &\geq 0\,,\\
z := \frac{\Sigma_c + \Sigma_s + \Sigma_v - \Sigma_c x - \Sigma_v y}{\Sigma_s} &\geq 0\,,\\
p := \frac{\Sigma_s}{\Sigma_c x + \Sigma_v y} &\geq 0\,.
\end{aligned} \tag{1}$$

Hemos definido z para que se cumpla trivialmente que el agregado de precios coincida con el de valores, una mera normalización. Del mismo modo, hemos definido p para que por mera definición tengamos que la tasa de ganancia viene determinada por la plusvalía.

Esto en general no tiene solución para unos valores arbitrarios de los coeficientes, *el problema de la transformación*.

2 La solución de Moseley y el debate Rallo-Astarita

Fred Moseley argumenta que en el equilibrio interdepartamental lo importante no es la estructura de valores (es decir, el valor total generado en cada departamento), sino la estructura de precios de producción. Razona con un ejemplo de *dos* departamentos. Por lo tanto, si asumimos que estos bienes de capital y fuerza de trabajo ya han sido comprados a sus precios de producción, lo que queda por distribuir es la plusvalía agregada entre los dos sectores en función del capital que han invertido.

Formalmente, las nuevas ecuaciones serían:

$$\begin{aligned} (\mathrm{I}_c^p + \mathrm{I}_v^p)(p+1) &= \Sigma_c^p \,, \\ (\mathrm{II}_c^p + \mathrm{II}_v^p)(p+1) &= \Sigma_v^p + \Sigma_b \,, \\ p &= \frac{\Sigma_s}{\Sigma_c^p + \Sigma_v^p} \geq 0 \,. \end{aligned} \tag{2}$$

haciendo referencia el superíndice p a precios de producción y el subíndice b a los beneficios. Como por definición $p = \frac{\Sigma_b}{\Sigma_c^p + \Sigma_v^p}$, la última ecuación es equivalente a que $\Sigma_b = \Sigma_s$, es decir, el beneficio agregado es igual a la plusvalía agregada. Por otro lado,

$$\Sigma_c^p + \Sigma_v^p = \Sigma_c + \Sigma_v \,, \tag{3}$$

se satisface trivialmente al tener que $i_a^p = i_a$ como supuesto, con $i \in \{\mathrm{I}, \mathrm{II}\}$ y $a \in \{c, v\}$. Las dos primeras ecuaciones son equivalentes a

$$\mathrm{I}_v^p + \mathrm{I}_b = \mathrm{II}_c^p \,, \tag{4}$$

además si sumamos ambas ecuaciones tenemos que

$$\left(\Sigma_c^p + \Sigma_v^p\right)(p+1) = \Sigma_c^p + \Sigma_v^p + \Sigma_b \,.$$

Es decir, $x = y = 1$ es una solución del modelo de dos departamentos siempre que (4) sea satisfecha.

2.1 Crítica de Rallo

En su libro [3], Rallo comenta que si la tasa de plusvalía, $\chi := \Sigma_s / \Sigma_v$, se modificase, provocando una variación de p, con la nueva tasa de ganancia p' se destruye el equilibrio anterior. Ver aquí para más detalles y ejemplos numéricos. En particular, la modificación de la tasa de ganancia implica que se pasa de

$$\mathrm{I}_v^p = 70 \,, \mathrm{I}_b = 120 \,, \mathrm{II}_c^p = 190 \,, \quad \mathrm{I}_v^p + \mathrm{I}_b = \mathrm{II}_c^p = 190 \,,$$

a los siguientes valores

$$\mathrm{I'}_v^p = 84 \,, \mathrm{I'}_b = 93{,}5 \,, \mathrm{II'}_c^p = 190 \,, \quad \mathrm{I'}_v^p + \mathrm{I'}_b \neq \mathrm{II'}_c^p = 190 \,,$$

rompiéndose el equilibrio. En el nuevo equilibrio, se tendrá que, con respecto a los valores:

> Nótese que, como se destina el mismo número de horas y se utiliza la misma técnica productiva, no sólo es que el valor de las mercancías deba ser idéntico (el valor de las mercancías I y II en la tabla XX es el mismo que en la tabla XVIII), sino que el número de mercancías fabricadas y las relaciones de producción entre ellas también debería ser también idéntico.

Sin embargo, con respecto a los precios de producción:

> Así las cosas, si el tiempo de trabajo social de una economía no ha variado en las tablas 2, 3 y 9 de Astarita, el valor agregado tampoco debería cambiar. Podrán cambiar los precios de producción individuales, sin duda: pero no el valor agregado. Y si el valor agregado en las tabla 2, 3 y 9 es el mismo, entonces los precios de producción agregados tampoco deberían cambiar entre la tabla 3 y la tabla 9. Si los precios de producción agregados cambian, entonces es que los precios de producción agregados no eran iguales a los valores agregados en el equilibrio inicial de la tabla 2 (960) o que no son iguales en el nuevo equilibrio de la tabla 9 (927,27).

2.1.1 Formalización

Esto lo podemos ver formalmente en la ecuación (4). Un cambio de la tasa de plusvalía, $\Delta\chi := \chi' - \chi \neq 0$, provocará que la ecuación no se satisfaga necesariamente al verse modificados los valores de $\mathrm{I}_v^p, \mathrm{I}_b, \mathrm{II}_c^p$. Más en concreto, para $i \in \{\mathrm{I}, \mathrm{II}\}$,

$$i_v + i_s = i'_v + i'_s = i'_v(1+\chi').$$

Será por tanto necesario resolver de nuevo (2), pero ahora

$$\mathrm{I}'^p_c = x \cdot \mathrm{I}_c,\ \mathrm{I}'^p_v = y \cdot \mathrm{I}_v,\ \mathrm{II}'^p_c = x \cdot \mathrm{II}_c,\ \mathrm{II}'^p_v = y \cdot \mathrm{II}_v. \tag{5}$$

Con estas nuevas ecuaciones donde x, y no son necesariamente iguales a la unidad, pero el valor agregado no cambia, tenemos el problema de que (3) no se satisface necesariamente. Es decir, volvemos al sistema de Bortkiewicz y sus problemas.

2.2 La respuesta de Astarita

Astarita responde discutiendo cómo se llega al equilibrio y dando detalles del proceso iterativo dada la variación de la tasa de plusvalía que describe Rallo.

Siguiendo sus tablas, de la 4 a la 9, muestra como en cada nueva etapa, usando como *inputs* los resultados de la anterior, se llega a un estado donde hay un nuevo equilibrio interdepartamental.

2.2.1 Formalización

Formalmente,

$$i_c^t = i_c^{t-1}\frac{P_I^{t-1}}{P_I^{t-2}}\,, \quad i_v^t = i_v\,, \quad p^t = \frac{\Sigma_s}{\Sigma_c^{p,t} + \Sigma_v^{p,t}}\,,$$

siendo $P_I^t := (I_c^{p,t} + I_v^{p,t})(1+p^t)$ los precios de producción del departamento I en el periodo t. De aquí es fácil probar lo siguiente. Por cancelación telescópica del producto:

$$i_c^{p,t+1} = i_c^{p,t-1}\frac{P_I^t}{P_I^{t-1}}\frac{P_I^{t-1}}{P_I^{t-2}} = i_c^{p,t-1}\frac{P_I^t}{P_I^{t-2}} \Rightarrow i_c^{p,t_0+t} = i_c^{p,t_0-1}\frac{P_I^{t_0+t-1}}{P_I^{t_0-2}}.$$

Si cogemos t_0 tal que ese periodo corresponde a la Tabla 4 del post de Astarita y suponemos que al avanzar el tiempo $P_I^t \to P_I^\infty \equiv P'_I$, el valor de equilibrio,

$$i_c^p = i_c^{p,t_0-1}\frac{P_I}{P_I^{t_0-2}} \Rightarrow \mathrm{I}_c^p + \mathrm{II}_c^p = P_I\frac{\mathrm{I}_c^{p,t_0-1} + \mathrm{II}_c^{p,t_0-1}}{P_I^{t_0-2}} = P_I = \mathrm{I}_c^p + \mathrm{I}_b^p + \mathrm{I}_v^p\,.$$

Por simplicidad hemos quitado las primas, i.e., P_I debería entenderse como P'_I e igual para otras variables.

Por tanto, tenemos que $\mathrm{I}_b^p + \mathrm{I}_v^p = \mathrm{II}_c^p$ y, por ende, el estado final cumple el equilibrio entre departamentos. Que la tasa de plusvalía coincida con la de beneficio es una consecuencia inmediata de cómo se define la dinámica de la tasa de ganancia.

Sin embargo, como apuntábamos antes, esto simplemente nos da un proceso iterativo para llegar al equilibrio, pero es el mismo equilibrio al que se llegaría resolviendo el sistema de Bortkiewicz (5) y **no** se resuelve el problema de la ecuación (3). Por tanto, *la crítica de Rallo sigue vigente.*

Rolando Astarita argumenta que:

> Esto es, el valor –expresado en el precio- disminuyó, pero no porque se hubieran reducido los tiempos de trabajo, sino por lo ya explicado, la necesidad de igualar la tasa de ganancia y la consiguiente caída de los precios de producción. Sin embargo, "al interior" de las tablas 2, 3 y 9 se verifica que Σ Pr Pr = C + VA = C + V + B. Esta igualdad no rige, sin embargo, en la transición hacia el nuevo equilibrio, como hemos visto en tabla 4. A su vez, puede verse que la igualdad VA = V + B no es una opción del analista que hace matemáticas, sino una consecuencia necesaria del método secuencial.

Es decir, se reconoce que la igualdad (3) *no* se satisface. Se intenta sustituir por igualar el valor agregado por la suma de capital variable más beneficios, es decir, precios de producción son iguales a los precios de producción, lo que es una trivialidad distinta a (3). Por otro lado, veamos que el valor agregado, ver cita arriba de Marx, incluye el valor de C, pero Astarita lo omite y solo incluye el de V y S (o B), que es constante para todas las tablas por la definición de la dinámica.

2.2.2 El equilibrio y el método secuencial

Astarita cree encontrar una diferencia esencial en el método secuencial y el equilibrio:

> En primer lugar, señalar que el método "a lo Bortkiewicz", o Walras (también los sraffianos, véase aquí), está basado en la idea de que, en ausencia de perturbaciones aleatorias, el sistema económico está en equilibrio. Y si ocurre alguna variación, se mantiene "en equilibrio general", recurriendo al sistema de ecuaciones que hace desaparecer el tiempo. Es un sistema, en esencia, cerrado. El enfoque de Moseley –y de otras corrientes marxistas, a las que Fred pasa revista en su libro- es, en cambio, dinámico y abierto a los cambios de las variables.

Mas esto es no entender la diferencia entre cómo se llega al equilibrio y el equilibrio. Se puede sostener al mismo tiempo un método dinámico para llegar al equilibrio y que el equilibrio debe satisfacer ciertas propiedades, como las de (1). Cogiendo un ejemplo trivial de la teoría de sistemas dinámicos, un equilibrio de un sistema dinámico es un punto que permanece inalterado. En otras palabras, un equilibrio es una solución que no cambia con el tiempo. En un sistema dinámico discreto, tenemos una ecuación de la *dinámica*

$$x_{t_{n+1}} = f(x_{t_n})\,, \tag{dinámica}$$

se pueden encontrar puntos de *equilibrio* si suponemos que $x_{t_n} \to x$ (asumiendo que f es continua)

$$x = f(x)\,, \tag{equilibrio}$$

es decir, un punto fijo de la función. Estudiar las propiedades de los puntos de equilibrio, (equilibrio), no implica ≪que hace desaparecer el tiempo≫, ya que es perfectamente compatible con estudiar separadamente la dinámica que lleva a tal equilibrio, (dinámica). Discutir un asunto no implica olvidarse del otro, pues son temas que se pueden separar. Por ejemplo, es normal que los marxistas, como Brody, usen sistemas de ecuaciones simultáneas para estudiar el equilibrio, [1], que platea el problema usando autovectores. Ver [4] para más detalles. Por otro lado, poder incluir cuestiones de tiempo y dinámica en los modelos de equilibrio general es algo bastante estándar en teoría económica, [2][Chapter 20].

References

[1] A. BRÓDY, *Proportions, prices and planning; a mathematical restatement of the labor theory of value*, North-Holland, 1970.

[2] A. MAS-COLELL, M. D. WHINSTON, AND J. R. GREEN, *Microeconomic theory*, Oxford university press New York, 1995.

[3] J. R. RALLO, *Anti-Marx: Crítica a la economía política marxista*, Deusto, 2022.

[4] A. ROMANIEGA, *Análisis teórico de las demostraciones de la teoría marxista del valor. Crítica a Karl Marx y Ernest Mandel.*, 2020.